

5 系统的时域分析方法

系统处理信号以获取信号携带的信息，按照处理信号的种类系统可分为连续系统、离散系统、数字系统。其中：连续系统可由模拟电路或元件实现；数字系统可由数字电路实现；离散系统和前面讲述的离散信号相同，经过量化后即为数系统，即数字系统是离散系统的近似实现。系统还可分为线性与非线性系统、时变与时不变系统、因果与非因果系统、稳定与非稳定系统，其中线性时不变的因果稳定系统是最常用的系统，也是本书的重点。

本章包括：5.0 引言；5.1 系统互联与系统属性；5.2 卷积表示；5.3 卷积性质；5.4 小结。

5.0 引言

前面章节讨论了一个连续信号如何变成离散信号，以及一个离散信号如何变成连续信号。本章主要讨论离散信号怎么处理。离散时间信号的处理过程，如图 5.1 所示。

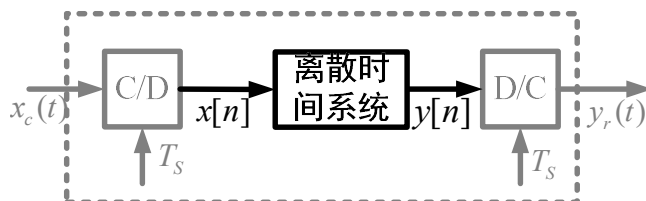


图 5.1 信号时间系统

图 5.1 表示一个离散时间系统，它可以理解为一种变换，或者一种映射，将输入信号 $x[n]$ 变换为输出信号 $y[n]$ 。一般会用方框来表示发生了一次转换，从 $x[n]$ 到 $y[n]$ ；有时也可以用速记符号 $T[\square]$ 来表示，表明输入序列 $x[n]$ 转换成了 $T[x[n]]$ ，即 $y[n] = T[x[n]]$ 。

5.1 系统互联与系统属性

这一节中讨论系统的互联与系统的属性。

5.1.1 系统互联

最基本的系统互联方式有：系统级联（或者称为串联）、系统并联和系统反馈互联。

系统级联

系统级联的定义为：对于两个系统，系统 1 和系统 2，总的输入是系统 1 的输入，总的输出是系统 2 的输出，而系统 1 的输出同时也是系统 2 的输入，这种互联方式就称为系统级联。

系统的级联方式如图 5.2 所示。

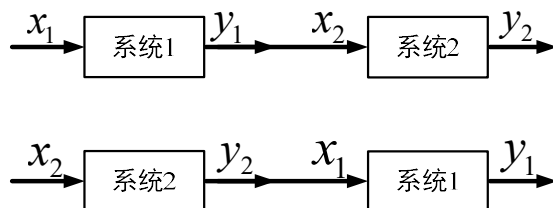


图 5.2 系统级联关系

图 5.2 表示某个系统（系统 1）的输出，将其作为另一个系统（系统 2）的输入；或者将这两个系统以相反的顺序级联，即取系统 2 的输出，把它输入到系统 1 中。

一般情况下，级联顺序影响结果，举个例子比如：系统 1 为乘以两倍，系统 2 为取平方根；不难分析，信号先经过系统 1 再经过系统 2 的结果，跟先经过系统 2 再经过系统 1 的结果不一样。

但是值得注意的是，有一种特殊情况：**线性时不变系统**，它的输出跟系统级联顺序无关。

系统并联

系统并联的定义为：对于两个系统，系统 1 和系统 2，输入同时进入系统 1 和系统 2，然后这两个系统的输出相加，成为整体系统的输出，这种互联方式就称为系统并联。

系统的并联方式如图 5.3 所示。

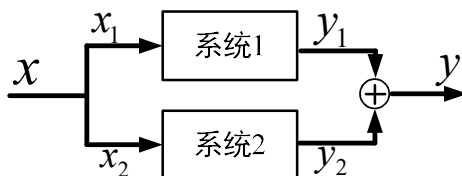


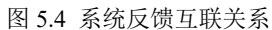
图 5.3 系统并联关系

可以证明：如果有多个子系统在平行组合中，平行排列的顺序跟整体系统的输出没有影响。这一点可以很好理解，因为整体输出只是把各个子系统的输出相加起来，而加法中各因子的顺序是无所谓的。

系统反馈互联

系统反馈互联的定义为：对于两个系统，系统 1 和系统 2，系统 1 的输出是整个系统的输出，而且输出接到系统 2 中，作为系统 2 的输入；而系统 2 的输出，加到整个系统的输入中，作为系统 1 的输入，这种互联方式就称为系统并联。

图 5.4 表示了系统的正反馈互联。



一般情况下，系统会同时具有串联、并联和反馈互联等互联方式，以实现各种各样的应用。

到目前为止，讨论涉及的都是一个一般系统。对于某个特定的系统，它具有或者不具有某些属性，对于分析问题是很重要的。因此，接下来的讨论重点为系统属性，将其中一些进行归类定义。在实际情况下，人们会希望系统具有某些属性，或者系统不具有某些属性。随着讨论的深入，会得出结论：系统具有某些属性，是有特殊意义的。下面归类定义的系统属性有：记忆性、可逆性、因果性、稳定性、线性、时不变性。

无记忆系统的定义是：在任何给定的时间点上的输出，只跟同一时间点上的输入有关。

判断以下系统是否为无记忆系统。

$$(3) \ y[n] = x[n-1].$$

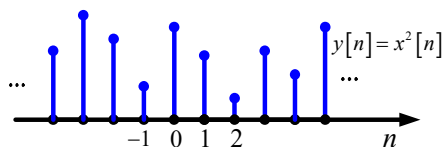


图 5.5 例子：平方电路

(2) $y(t) = \int_{-\infty}^t x^2(\tau) d\tau$ ，输出与以前时刻的输入有关，为有记忆系统。该类系统称为“积分电路 Integrator”；

(3) $y[n] = x[n-1]$ ，输出与以前时刻的输入有关，为有记忆系统。该类系统称为“单位延迟系统 Unit Delay”。

设计无记忆系统的时候，不需要设计存储器。因为进来一个数，直接对它进行处理就可以了。

可逆系统

可逆系统的定义是：如果已知系统输出，就可以计算出唯一的输入。

例 5.2 判断系统可逆性

判断以下系统是否可逆：

$$(1) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau;$$

$$(2) y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k];$$

$$(3) y(t) = x^2(t).$$

解：(1) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ，是可逆的，它的逆系统为微分电路 $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ；

$$(2) y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]，是可逆的，它的逆系统为差分电路 $y[n] = x[n] - x[n-1]$ ；$$

$$(3) y(t) = x^2(t)，平方电路不可逆。$$

因果系统

因果系统的定义是：任何时间点上系统的响应只取决于等于或先于该时间点上的输入。

即，系统无法预见未来的输入。

例 5.3 判断系统因果性

判断以下系统是否为因果系统：

$$(1) y_1[n] = \frac{1}{3} \{x_1[n-1] + x_1[n] + x_1[n+1]\};$$

$$(2) y_1[n] = \frac{1}{3} \{x_1[n-2] + x_1[n-1] + x_1[n]\}。$$

解：(1) $y_1[n] = \frac{1}{3} \{x_1[n-1] + x_1[n] + x_1[n+1]\}$ 中， $x_1[n+1]$ 属于未来的输入，因此该系统为非因果系统；

(2) $y_1[n] = \frac{1}{3} \{x_1[n-2] + x_1[n-1] + x_1[n]\}$ ，为因果系统。

这两类系统都属于“滑动平均系统 Moving Average”，如图 5.6 所示。

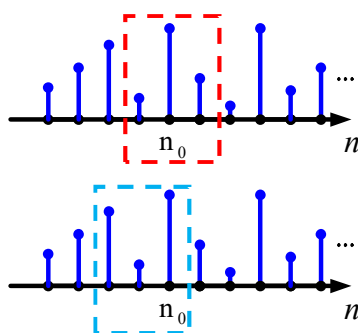


图 5.6 例子：滑动平均系统

因果系统，是可实现的系统；非因果系统，是不可实现的系统。因为非因果系统需要下一时刻的输入，而下一时刻的输入是得不到的。

稳定系统

稳定系统的定义是：系统是稳定的，当且仅当若输入信号有界时则输出信号必有界。

例 5.4 判断系统稳定性

判断以下系统是否为稳定系统：

$$(1) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau;$$

$$(2) y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k];$$

$$(3) y[n] = u[n]。$$

解：(1) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ，输入有界时输出无界，该系统为非稳定系统；

(2) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$ ，输入有界时输出无界，该系统为非稳定系统，如图 5.7 所示；

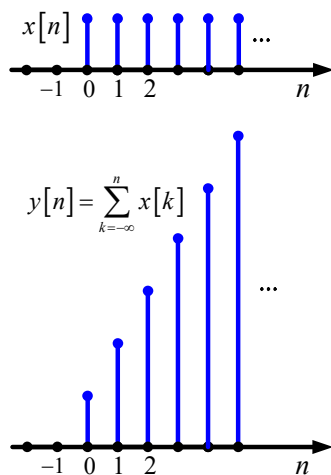


图 5.7 例子：求累加和电路

(3) $y[n] = u[n]$ ，输入有界时输出有界，该系统为稳定系统。

时不变系统

时不变系统的定义是：系统的性能不会随着时间的改变而改变。输入在时间上进行位移，则输出也会发生相应的时移。

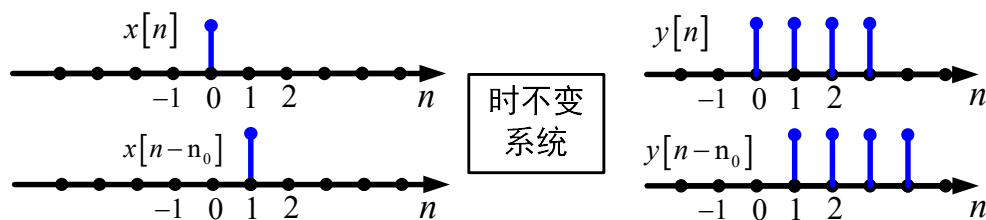


图 5.8 例子：时不变系统

在时不变系统中， x 输入时不变系统以后，得到是 y 。若把 x 延迟 $n - n_0$ 时刻，输入时不变系统，得到的 y 也是同样的延迟 $n - n_0$ 时刻，如图 5.8 所示。

例 5.5 判断系统时不变性

判断以下系统是否为时不变系统：

$$(1) y(t) = \sin(t)x(t)$$

$$(2) y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$$

解：(1) $y(t) = \sin(t)x(t)$ ，是时变系统；因为

$$\begin{aligned} x(t - t_0) &\rightarrow \sin(t)x(t - t_0) \\ &\neq \sin(t - t_0)x(t - t_0) = y(t - t_0) \end{aligned}$$

(2) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]$, 是时不变系统, 该类系统称为“累加器 Accumulator”。

线性系统

线性系统的定义是: 若输入具有任意线性组合, 输出具有相同线性组合。线性包括齐次性和叠加性。

齐次性: 系统输入 $x[n]$, 输出为 $y[n]$ 。当系统输入 $ax[n]$ 时 (a 乘以 $x[n]$, a 倍的 $x[n]$), 能够输出 $ay[n]$ (a 乘以 $y[n]$, a 倍的 $y[n]$), 如图 5.9 所示。

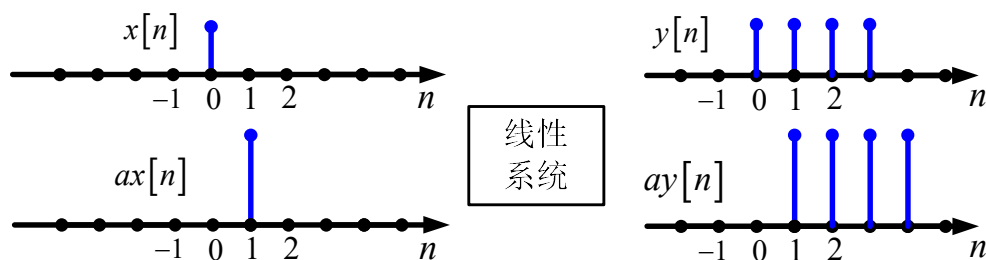


图 5.9 齐次性示意图

叠加性: 系统输入 $x_1[n]$, 输出为 $y_1[n]$; 系统输入 $x_2[n]$, 输出为 $y_2[n]$ 。当系统输入 $x_1[n] + x_2[n]$, 能够输出 $y_1[n] + y_2[n]$, 如图 5.10 所示。

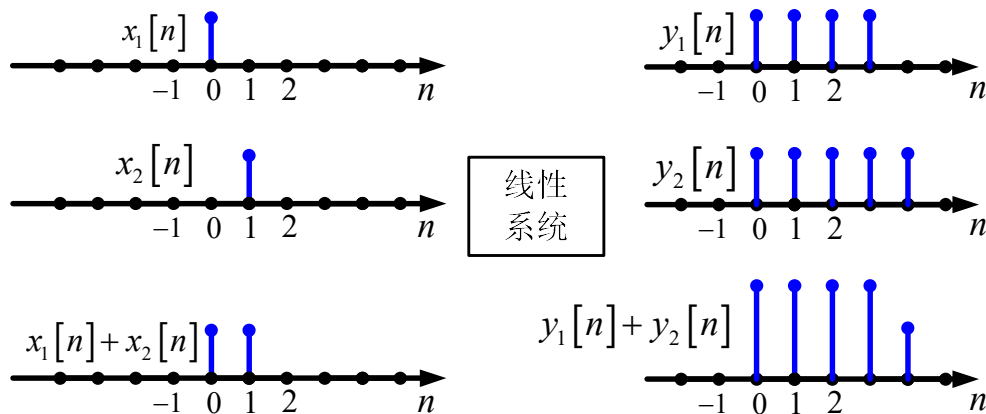


图 5.10 叠加性示意图

线性系统必须同时满足齐次性和叠加性。系统输入 $x_1[n]$, 输出为 $y_1[n]$; 系统输入 $x_2[n]$, 输出为 $y_2[n]$; 当系统输入 $ax_1[n] + bx_2[n]$, 能够输出 $ay_1[n] + by_2[n]$, 如果系统满足这样的条件, 这个系统就是线性系统。

例 5.6 判断系统线性

判断以下系统是否为线性系统：

$$(1) y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$(2) y[n] = x^2[n]$$

$$(3) y[n] = 2x[n] + 3$$

解：(1) $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ，是线性系统；

(2) $y[n] = x^2[n]$ ，是非线性系统；

(3) $y[n] = 2x[n] + 3$ ，是非线性系统，该类系统称为“增量线性系统 Incrementally Linear System”。

总结一下，系统按照记忆性来分，可分为无记忆系统和有记忆系统；按照可逆性来分，可以分为可逆系统和不可逆系统；按照因果性来分，可以分为因果系统和非因果系统；按照稳定性来分，可以分为稳定系统和非稳定系统；按照线性来分，可以分为线性系统和非线性系统；按照时变性来分，可以分为时变系统和时不变系统。这些性质中，线性时不变系统尤为重要。

5.2 卷积表示

在看卷积表示前，先要介绍两种常用的信号：单位脉冲信号与单位阶跃信号。

单位脉冲信号

首先，引入连续时间单位阶跃信号 $u(t)$ 与连续单位脉冲信号 $\delta(t)$ ，用于比较：

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad (5.2)$$

类似地，定义离散时间单位脉冲信号

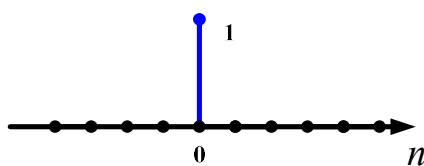


图 5.11 离散时间单位脉冲信号表示

离散时间单位脉冲信号的定义：除了在 $n=0$ 处的值为 1 外，其他处的值均为 0 的离散

时间信号。可用 $\delta[n]$ 表示：

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

$\delta[n]$ 的图形表示如图 5.11 所示。

可见，在离散时间信号与系统中单位脉冲信号 $\delta[n]$ 所起的作用就如同 $\delta(t)$ 在连续时间信号与系统中所起的作用。值得注意的是，离散时间单位脉冲信号 $\delta[n]$ 与连续时间单位脉冲信号 $\delta(t)$ 相比，其数学定义更加简单明确。

在线性系统讨论中，离散时间单位脉冲信号 $\delta[n]$ 的一个重要作用是任何序列都可以用一组幅度加权和延迟的 $\delta[n]$ 来表示。

单位阶跃信号

离散时间单位阶跃信号的定义为：在 $n \geq 0$ 时的值为 1； $n < 0$ 时的值为 0 的离散时间信号。可用 $u[n]$ 表示：

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

$u[n]$ 的图形表示如图 5.12 所示。

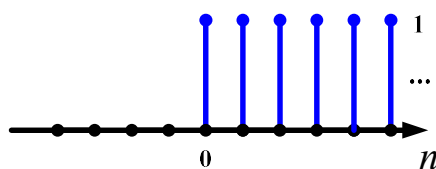


图 5.12 离散时间单位阶跃信号表示

由单位阶跃信号与单位脉冲信号的定义，可以分析出它们之间存在的数学关系。下面进行分析。

单位脉冲与单位阶跃的关系

用不同的表达式可以表示离散时间单位脉冲信号 $\delta[n]$ 与离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 的关系。如，离散时间单位脉冲信号 $\delta[n]$ 可以表示成离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 的一阶后向差分：

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (5.5)$$

图 5.13 用图示的方法表示了式(5.5)这一关系。

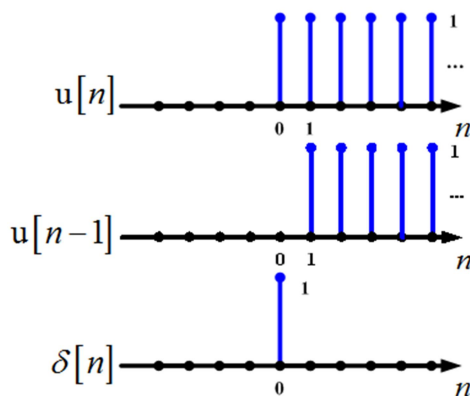


图 5.13 $\delta[n]$ 与 $u[n]$ 关系：一阶后向差分

式(5.5)说明了单位脉冲信号可用单位阶跃信号表示。反过来单位阶跃信号也可以用单位脉冲信号表示：离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 在 n 时刻的值就等于在 n 点及该点以前全部的离散时间单位脉冲信号的累加和：

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (5.6)$$

图 5.14 用图示的方法表示了式(5.6)这一关系。

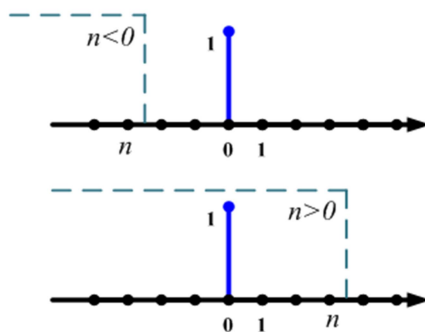
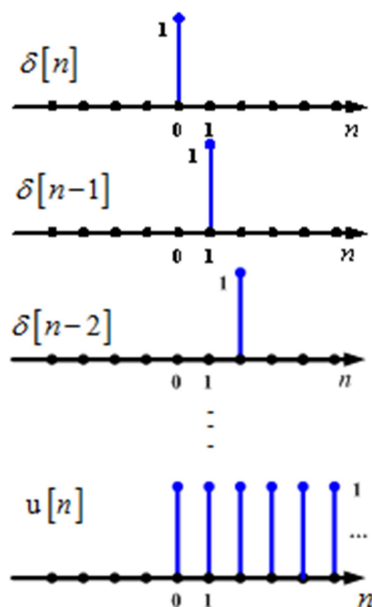


图 5.14 $\delta[n]$ 与 $u[n]$ 关系：动求和

式(5.6)的关系式称为“动求和”。离散时间单位阶跃信号 $u[n]$ 也可以看作是一组延迟的离散时间单位脉冲信号之和，非零值全都是 1：

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \quad (5.7)$$

图 5.15 用图示的方法表示了式(5.7)这一关系。

图 5.15 $\delta[n]$ 与 $u[n]$ 关系：累加和

式(5.7)的关系式称为“累加和”。式(5.5)-(5.7)表述了离散时间单位脉冲信号与离散时间单位阶跃信号的关系：一阶后向差分、动求和、累加和；单位脉冲信号可以由单位阶跃信号表示，反过来单位阶跃信号也可以由单位脉冲信号表示。

离散时间信号分解

对于任意的离散信号 $x[n]$ ，都可以表示成单个脉冲信号的相叠加形式，如图 5.16 所示。

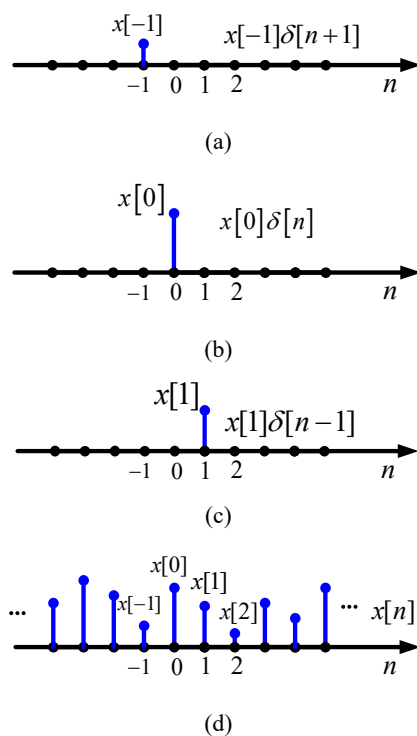


图 5.16 离散时间信号分解过程

其中，图(a)为乘积 $x[-1]\delta[n+1]$ 的示意图，前面的 $x[-1]$ 表示信号原来的幅度；后面的 $\delta[n+1]$ 表示它的位置；图(b)为 $x[0]\delta[n]$ 的示意图；图(c)为 $x[1]\delta[n-1]$ 的示意图；从负无穷到正无穷把这些结果都加起来，可以得到图(d)的图形，即 $x[n]$ ：

$$x[n] = \cdots x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + \cdots \quad (5.8)$$

式(5.8)写成累加和的形式为：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (5.9)$$

式(5.9)表示从 $-\infty$ 到 ∞ ，对 $x[k]\delta[n-k]$ 求和。由此可以得出结论：任意一个序列都可以分解成加权延时脉冲的线性组合。

系统时不变性

首先假设系统输入为 $\delta[n]$ 时，输出为 $h[n]$ ，用公式表示为：

$$\begin{aligned} y[n] &= T[x[n]] = \\ h[n] &= T[\delta[n]] \end{aligned} \quad (5.10)$$

接下来分析，如果这个系统是一个时不变系统，那么当输入信号为

$$x_k[n] = \delta[n-k] \quad (5.11)$$

输出信号为

$$y_k[n] = h[n-k] \quad (5.12)$$

如图 5.17 所示。

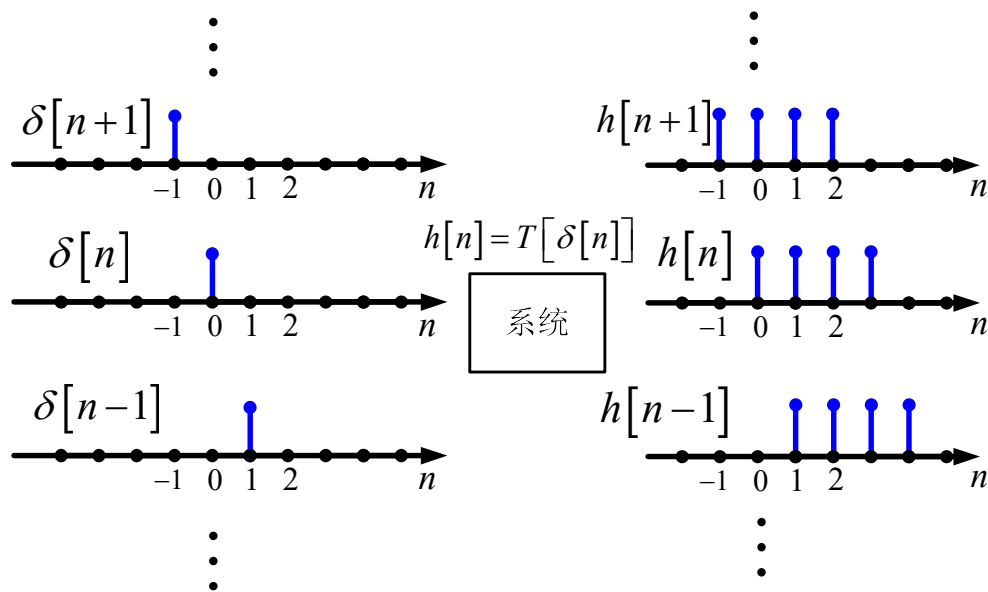


图 5.17 应用时不变性示意图

也就是说对于时不变系统，它的输出可以表示成响应不同延迟的形式。

应用齐次性

如果这个时不变系统还满足齐次性，也就是说，当输入信号为

$$x_k[n] = x[k] \delta[n-k] \quad (5.13)$$

输出信号为

$$y_k[n] = x[k] h[n-k] \quad (5.14)$$

如图 5.18 所示。

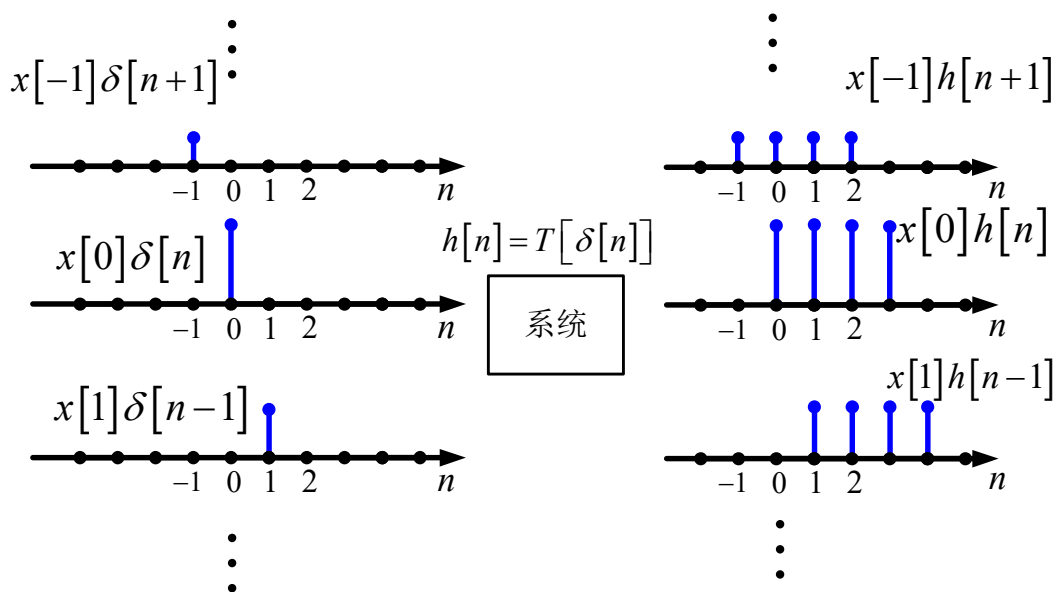


图 5.18 应用齐次性示意图

输入信号乘以一个系数，输出信号也乘以相应的系数，这是根据齐次性得到的。

应用叠加性

如果这个时不变系统还满足叠加性，也就是说，当输入信号为

$$x_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \quad (5.15)$$

输出信号为

$$y_k[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (5.16)$$

那么最终这样的系统称为线性时不变系统，如图 5.19 所示。

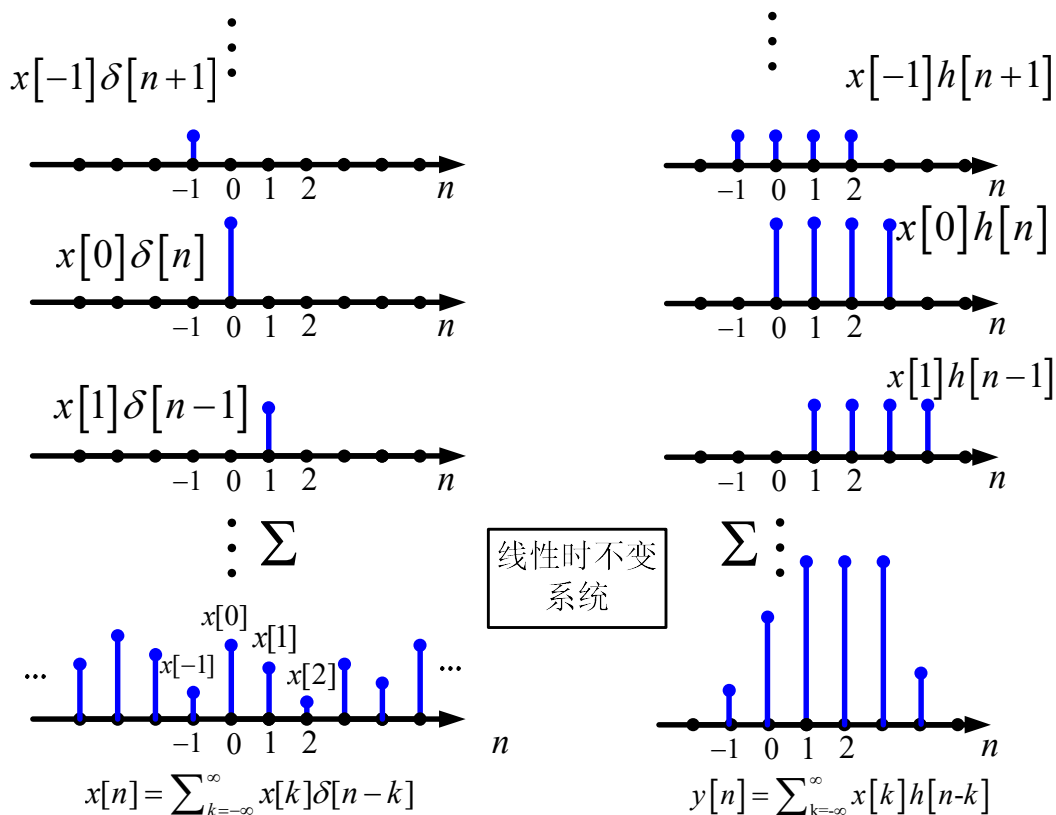


图 5.19 应用叠加性示意图

总结一下就是，如果这个系统既满足时不变性质，又满足线性，就称为线性时不变系统，也叫做 LTI 系统。用公式表示为：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] \quad (5.17)$$

卷积的定义：一般把(5.17)这种表示形式叫做卷积，表示两个变量在某范围内相乘后求和的结果。

例 5.7 求卷积

已知 $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, 7$ 为 $[1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0]$

而且 $h[n]$, $n = 0, 1, \dots, 7$ 为 $[0, 3, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$;

求 $y[n] = x[n] * h[n]$ 。

解：因为 $h[n]$, $n = 0, 1, \dots, 7$ 时为 $[0, 3, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$,

所以 $h[-k+n]$, $k = n-7, n-6, \dots, n$ 时为 $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 3, 0]$;

$$\text{因为 } y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-n)]$$

而且

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-0)] = x[0]h[0] = 1 \times 0 = 0$$

$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-1)] = x[0]h[1] + x[1]h[0] = 1 \times 3 + 1 \times 0 = 3$$

$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-2)] = x[0]h[2] + x[1]h[1] + x[2]h[0] = 1 \times 6 + 1 \times 3 + 1 \times 0 = 9$$

$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-3)] = 1 \times 5 + 1 \times 6 + 1 \times 3 + 1 \times 0 = 14$$

$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-4)] = 1 \times 4 + 1 \times 5 + 1 \times 6 + 1 \times 3 + 0 \times 0 = 18$$

$$y[5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-5)] = 1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5 + 1 \times 6 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 18$$

$$y[6] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-6)] = 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5 + 0 \times 6 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 14$$

$$\begin{aligned} y[7] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-7)] \\ &= x[0]h[7] + x[1]h[6] + x[2]h[5] + x[3]h[4] + x[4]h[3] + x[5]h[2] + x[6]h[1] + x[7]h[0] \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 + 0 \times 5 + 0 \times 6 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 10 \end{aligned}$$

$$y[8] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-8)] = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 3 + 0 \times 4 + 1 \times 5 + 0 \times 6 + 0 \times 3 = 6$$

$$y[9] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-9)] = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 4 + 0 \times 5 + 0 \times 6 = 3$$

$$y[10] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-10)] = 1 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 4 + 0 \times 5 = 1$$

$$y[11] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-11)] = 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 4 = 0$$

$$y[12] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-12)] = x[5]h[7] + x[6]h[6] + x[7]h[5] = 0 \times 1 + 0 \times 2 + 0 \times 3 = 0$$

$$y[13] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-13)] = x[6]h[7] + x[7]h[6] = 0 \times 1 + 0 \times 2 = 0$$

$$y[14] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[-(k-14)] = x[7]h[7] = 0 \times 1 = 0$$

所以根据卷积公式，结果为

$$y[n] = x[n] * h[n], n = 0, 1, \dots, 14 \text{ 为 } [0, 3, 9, 14, 18, 18, 14, 10, 6, 3, 1, 0, 0, 0, 0]$$

5.3 卷积性质

接下来是关于卷积的性质。卷积满足交换律、结合律和分配律。

交换律

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \quad (5.18)$$

对于线性时不变系统：输入与脉冲响应互换，输出不受影响，卷积交换律示意图如图 5.20 所示。

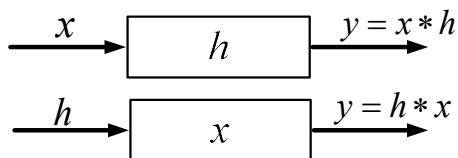


图 5.20 卷积交换律示意图

例 5.8 分析卷积的交换律性质，观察 $u[n] * \alpha^n u[n] = \alpha^n u[n] * u[n]$ ，说出它表示的意义。

解：等式左边可以看成输入为单位阶跃信号，系统响应函数为指数函数；等式右边可以看成输入为指数函数，系统响应函数为解约函数。结论为：卷积的运算顺序不会对卷积的结果造成影响。

结合律

$$x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] \quad (5.19)$$

由卷积的结合律和交换律，可以得出如下图关系：

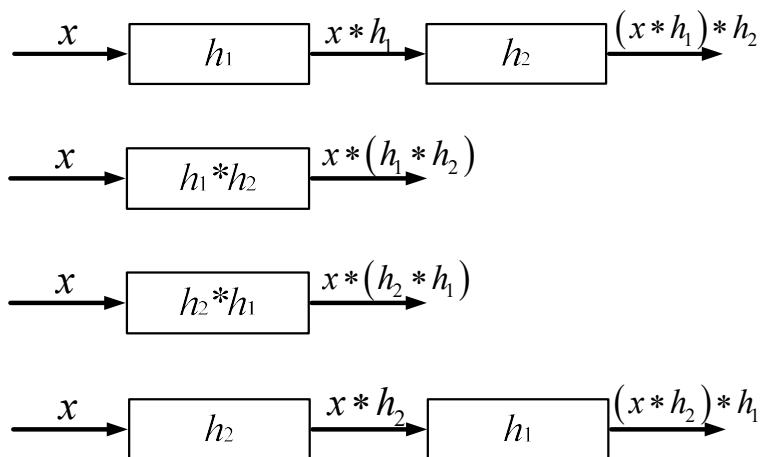


图 5.21 结合律与交换律结合

由图 5.21 可以看出，系统的级联可以用卷积的交换律和结合律的性质来理解。

分配律

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \quad (5.20)$$

卷积的分配律性质示意图，如图 5.22 所示。

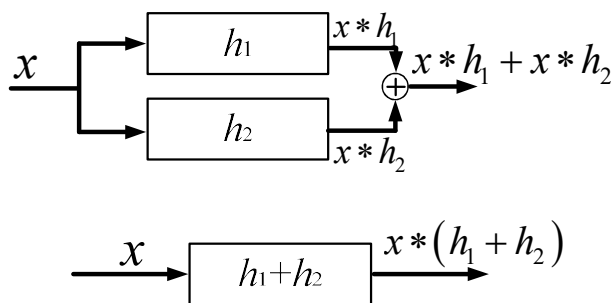


图 5.22 卷积分配律性质示意图

由图 5.22 可以看出，系统的并联可以通过卷积的分配律性质来理解。

LTI 系统因果性

对于一个 LTI 系统，假设 $n < 0$ 时 $h[n] = 0$ ，那么有以下关系：

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x[n-k]h[k] \end{aligned} \quad (5.21)$$

当前时刻的输出，只与以前时刻的 $x[n]$ 相关，根据因果性的定义，该 LTI 系统为因果系统。

因此，对于 LTI 系统的因果性判据为：当 $n < 0$ 时， $h[n] = 0$ ，则为因果系统；反之，为非因果系统。

LTI 系统稳定性

一个 LTI 系统为稳定系统的充分必要条件为：单位脉冲响应是绝对可和的。用公式表示为：

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5.22)$$

下面分别从充分性与必要性进行证明。

充分性证明：

已知 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$ ，那么 $y[n]$ 的模为

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \quad (5.23)$$

如果输入是有界的，设为 m

$$|x[n-k]| \leq m \quad (5.24)$$

那么此时 $y[n]$ 的模

$$|y[n]| \leq m \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad (5.25)$$

因此，如果单位脉冲响应是绝对可和的

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \quad (5.26)$$

那么 $y[n]$ 是有界的

$$|y[n]| \leq \infty \quad (5.27)$$

根据稳定性定义，有界的输入产生有界的输出。充分性证明完毕。

必要性证明：

必要性的命题为：若系统是稳定的，那么单位脉冲响应是绝对可和的。

我们通过其逆否命题来间接证明，其逆否命题为：若单位脉冲响应不是绝对可和的，那么系统是不稳定的。

已知单位脉冲响应不可和

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \quad (5.28)$$

假设一个有界的输入信号为：

$$x[n] = \begin{cases} \frac{h^*[-n]}{|h[-n]|} & h[n] \neq 0 \\ 0 & h[n] = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

送入系统以后，输出信号为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*[n+k]}{|h[n+k]|} h[k] \quad (5.30)$$

当 $n=0$ 时刻时

$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{h^*[k]}{h[k]} h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|h[k]|^2}{|h[k]|} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty \quad (5.31)$$

可以看出，由一个有界的输入，产生了一个无界的输出。根据稳定性的定义，这是一个不稳定系统。必要性证明完毕。

5.4 小结

无论是连续系统、离散系统、数字系统利用级联、并联、反馈可组成新的系统。按照记忆、稳定、因果、线性、时变等性质可将系统分为不同的种类，其中具有线性和时不变性质的系统成为线性时不变（LTI）系统。

依据连续时间信号可表示为单位冲激延迟加权叠加，可得 LTI 连续时间系统输入、输出与单位冲击响应之间的卷积关系。依据离散时间信号可表示为单位脉冲延迟加权叠加，可得 LTI 离散时间系统输入、输出与单位冲击响应之间的卷积关系。

此外，因果稳定系统具有可实现性，本章给出了 LTI 系统因果性、稳定性的判据。

5.5 习题

5.1 对于下列系统，判断系统的 (a) 稳定性，(b) 因果性，(c) 线性，(d) 时不变性，(e) 记忆性。

(1) $T(x[n]) = g[n]x[n]$ ($g[n]$ 已知)

(2) $T(x[n]) = \sum_{k=0}^n x[k]$

(3) $T(x[n]) = \sum_{k=n_0}^{n+n_0} x[k]$

(4) $T(x[n]) = x[n - n_0]$

(5) $T(x[n]) = \exp(x[n])$

(6) $T(x[n]) = ax[n] + b$

(7) $T(x[n]) = x[-n]$

(8) $T(x[n]) = x[n] + 3u[n+1]$

5.2 请判断下列各信号是否都是周期的？若是，周期是什么？

(1) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi n}{6}\right)}$

(2) $x[n] = e^{j\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}$

(3) $x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{5}\right)}{\pi n}$

(4) $x[n] = e^{j\left(\frac{\pi n}{\sqrt{2}}\right)}$

5.3 有一 LTI 系统其 $h[n] = 5(-1/2)^n u[n]$ ，用傅里叶变换求当输入 $x[n] = (1/3)^n u[n]$ 时，该系统的输出。

5.4 有一系统输入为 $x[n]$ ，输出为 $y[n]$ ，且满足下列差分方程：

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

该系统是因果的且满足初始松弛条件，即若 $n < n_0$ ， $x[n] = 0$ ，则有 $y[n] = 0$ ， $n < n_0$ 。

(1) 若 $x[n] = \delta[n]$ ，求 $y[n]$ (对全部 n)。

(2) 系统是线性的吗？试证明之。

(3) 系统是时不变的吗？试证明之。

5.5 对于图 P5.1 的系统，系统 1 是一个无记忆的非线性系统，系统 2 按如下关系决定 A

$$A = \sum_{n=0}^{100} y[n]$$



图 P5.1

现在考虑 $x[n] = \cos(\omega n)$ 一类的输入， ω 为实的有限数。在输入端改变 ω 值将变化 A 的值；也即， A 是 ω 的函数。一般来说， A 随 ω 改变会是周期的吗？陈述理由。

5.6 考虑一输入为 $x[n]$ 、输出为 $y[n]$ 的离散时间系统，当输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

时，输出是

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{对全部 } n$$

试判断下列哪种说法是正确的：

- (1) 系统必须是 LTI 的。
- (2) 系统可能是 LTI 的。
- (3) 系统不可能是 LTI 的。

如果答案是系统一定是或可能是 LTI 的话，请给出一种可能的单位脉冲响应。如果答案是不可能，请明确地说明为什么不可能是 LTI 的。

5.7 图 5.2 所示系统 A 和系统 B 的输入/输出关系，而图 P5.3 包含了这些系统的两种可能的级联方式，若 $x_1[n] = x_2[n]$ ， $w_1[n]$ 和 $w_2[n]$ 一定相等吗？若你的回答是，请简明扼要说明为什么，并用一个例子来说明。若回答不一定，也用一个反例来说明。

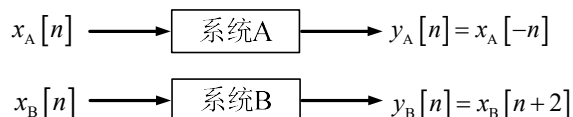


图 5.2

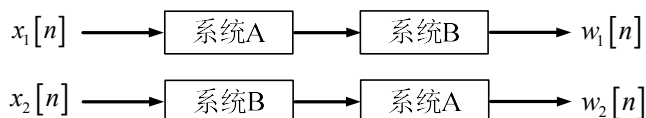


图 P5.3

5.8 (1) 已知一个线性时不变系统的单位脉冲响应除去在区间 $N_0 \leq n \leq N_1$ 内均为零。已知

输入 $x[n]$ 除去在区间 $N_2 \leq n \leq N_3$ 内均为零。其结果就是输出除去某一区间 $N_4 \leq n \leq N_5$ 内都为零。试用 N_0, N_1, N_2, N_3 来确定 N_4, N_5 。

(2) 若 $x[n]$ 除 N 个连续点外都为零, $h[n]$ 除 M 个连续点外也都是零, 试问对 $y[n]$ 不为零的最大连续点数是多少?

5.9 按卷积和直接计算, 求冲激响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统的阶跃响应, $h[n]$ 给出如下:

$$h[n] = a^{-n}u[-n], \quad 0 < a < 1$$

5.10 有一任意线性系统, 其输入为 $x[n]$, 输出为 $y[n]$, 证明: 若对所有 n , $x[n]=0$, 则 $y[n]$ 对所有 n 也必须为零。

5.11 对图 P5.4 中每一对序列, 利用离散卷积求单位脉冲响应为 $h[n]$ 的线性时不变系统对输入 $x[n]$ 的响应。

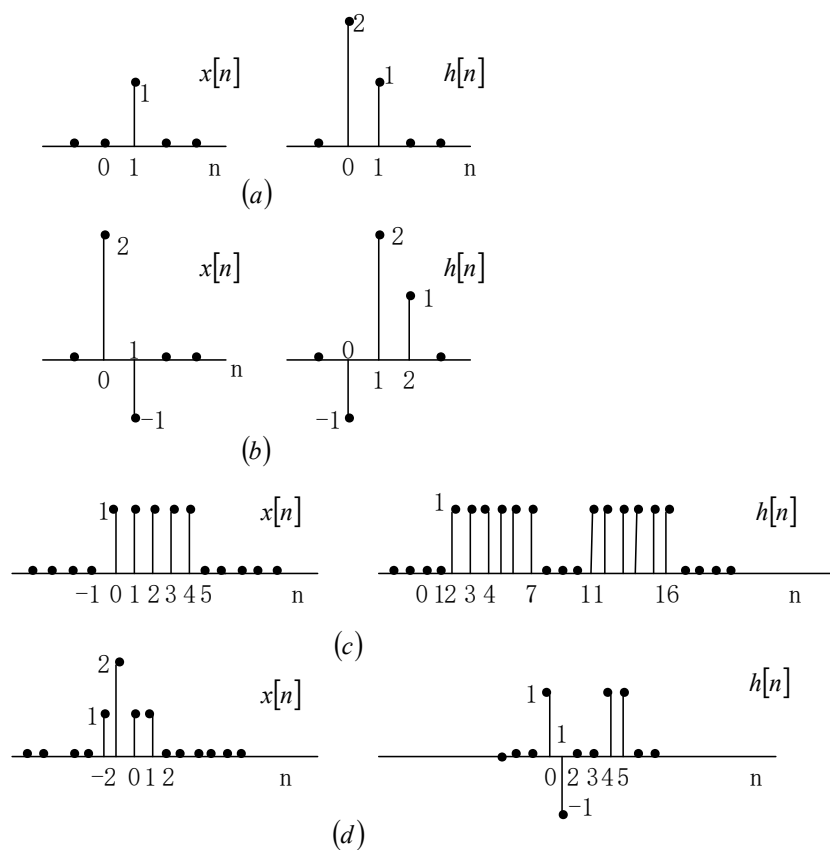


图 P5.4

5.12 一个线性时不变系统的单位脉冲响应如图 P5.5 所示, 求出并画出该系统对输入 $u[n] = u[n-4]$ 的响应。

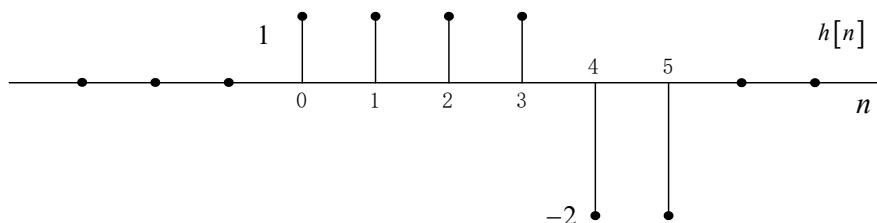


图 P5.5

5.13 假设系统 T 已知是时不变的，当系统输入是 $x_1[n]$ 、 $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 时，系统的响应分别为 $y_1[n]$ 、 $y_2[n]$ 和 $y_3[n]$ ，如图 P5.6 所示。

- (1) 确定系统是否为线性的。
- (2) 如果系统的输入 $x[n]$ 是 $\delta[n]$ 时，系统的响应 $y[n]$ 是什么？
- (3) 对于任意的输入 $x[n]$ ，系统的输出 $y[n]$ 能唯一确定吗？

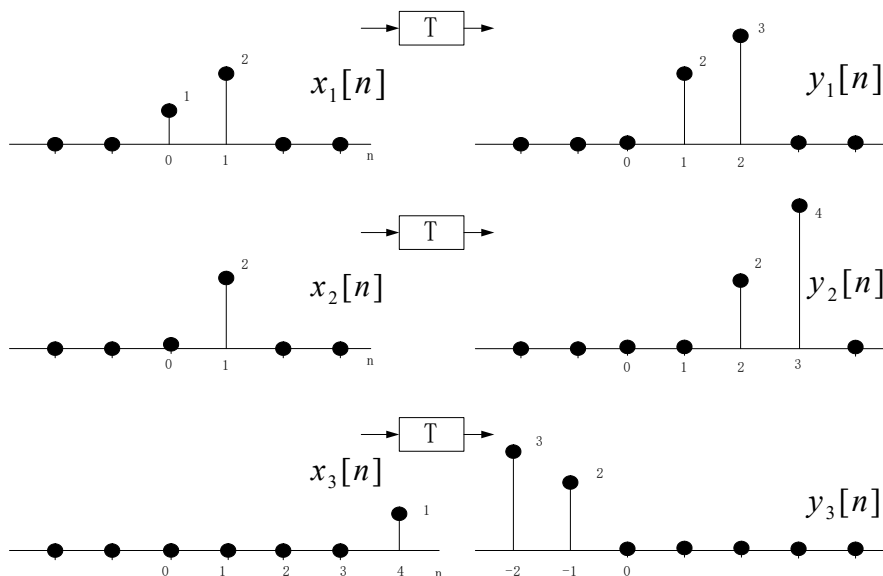


图 P5.6

5.14 一个线性时不变系统的单位脉冲响应为

$$h[n] = \left(\frac{j}{2}\right)^n u[n], \quad j = \sqrt{-1}$$

求稳态响应，即对激励为 $x[n] = \cos(\pi n)u[n]$ 时，在大 n 值时的响应。

5.15 一个因果线性时不变系统由下列差分方程描述：

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 2x[n-1]$$

- (1) 求系统的齐次响应，也即在 $x[n] = 0$ 时，对全部 n 可能的输出。

(2) 求系统的单位脉冲响应。

(3) 求系统的阶跃响应。

5.16 (1) 一线性时不变系统，其输入输出满足如下差分方程：

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2]$$

求其频率响应 $H(e^{j\omega})$ 。

(2) 有一系统，其频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega} + e^{-j3\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega} + \frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

写出表征该系统的差分方程。

5.17 考虑下面这个代表一个因果 LTI 系统的差分方程：

$$y[n] + \frac{1}{a}y[n-1] = x[n-1]$$

(1) 求作为常数 a 的函数的系统单位脉冲响应 $h[n]$ 。

(2) a 值在什么范围内系统是稳定的？

5.18 图 P5.7 中系统 L 已知是线性的，图中示出三种输出信号 $y_1[n]$ ， $y_2[n]$ 和 $y_3[n]$ 分别是对输入信号 $x_1[n]$ ， $x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 的响应。

(1) 确定系统 L 能否是时不变的。

(2) 如果系统 L 的输入 $x[n]$ 是 $\delta[n]$ ，系统响应 $y[n]$ 是什么？

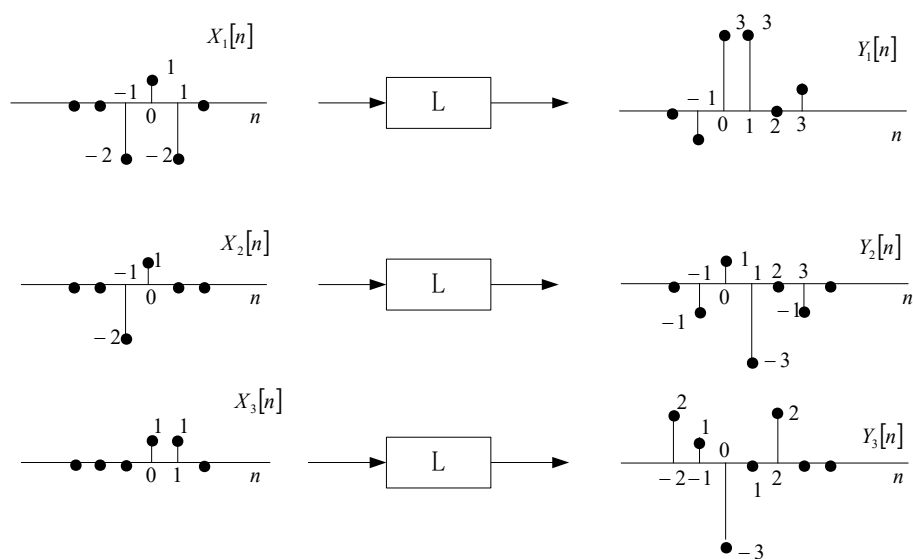


图 P5.7

5.19 利用线性的定义，证明：理想时延系统和滑动平均系统都是线性系统。

5.20 考虑一个离散时间线性时不变系统，其单位脉冲响应是 $h[n]$ 。若输入 $x[n]$ 是一个周期序列，周期为 N ，即 $x[n] = x[n + N]$ 。证明：输出 $y[n]$ 也是一个周期序列，周期为 N 。

5.21 一个线性时不变系统单位脉冲响应为

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} = u[n]$$

求该系统对输入 $x[n]$ 的响应。 $x[n]$ 如图 P5.8 所示，并描述如下：

$$x[n] = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ a^n, & 0 \leq n \leq N_1, \\ 0, & N_1 < n < N_2, \\ a^{n-N_2}, & N_2 \leq n \leq N_2 + N_1, \\ 0, & N_1 + N_2 < n. \end{cases} \quad 0 < a < 1$$

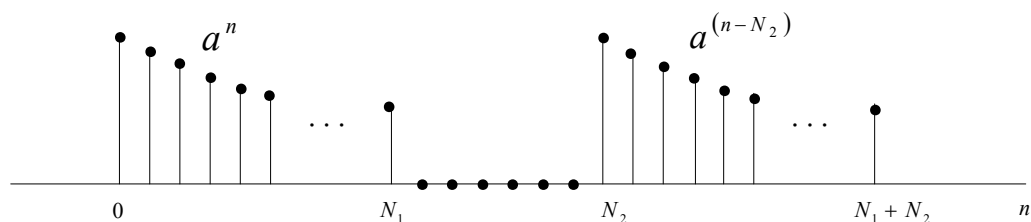


图 P5.8

5.22 证明：线性时不变系统的因果性，就是要求系统的单位脉冲响应满足条件：

$$\text{当 } n < 0 \text{ 时, } h[n] = 0。$$

（提示：可先证明如果 $n < 0$ 时 $h[n] \neq 0$ 的话，系统不可能是因果的；然后再证明如果 $n < 0$ 时 $h[n] = 0$ 的话，系统必定是因果的。）

5.23 利用线性卷积的定义证明对于任意信号 $h[n]$ ，有

$$h[n] * \delta[n] = h[n]$$

5.24 已知序列：

- (a) $x_1[n] = 3\delta[n-2] - 2\delta[n+1]$
- (b) $x_2[n] = 5\delta[n-3] + 2\delta[n+1]$
- (c) $h_1[n] = -\delta[n+2] + 4\delta[n] - 2\delta[n-1]$
- (d) $h_2[n] = 3\delta[n-4] + 1.5\delta[n-2] - \delta[n+1]$

确定由其中两个序列的线性卷积而得到的序列：

- (1) $y_1[n] = x_1[n] * h_1[n]$
- (2) $y_2[n] = x_2[n] * h_2[n]$
- (3) $y_3[n] = x_1[n] * h_2[n]$
- (4) $y_4[n] = x_2[n] * h_1[n]$

5.25 设 $g[n]$ 是定义在 $-3 \leq n \leq 4$ 上的有限长序列， $h[n]$ 是定义在 $2 \leq n \leq 6$ 上的有限长序列。

定义 $y[n] = g[n] * h[n]$ 。那么

- (1) $y[n]$ 的长度为多少？
- (2) $y[n]$ 的时间序号 n 的定义范围是多少？

5.26 设 $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ 和 $v[n] = x_1[n - N_1] * x_2[n - N_2]$ 。用 $y[n]$ 来表示 $v[n]$ 。

5.27 设 $g[n] = x_1[n] * x_2[n] * x_3[n]$ 和 $h[n] = x_1[n - N_1] * x_2[n - N_2] * x_3[n - N_3]$ 。用 $g[n]$ 来表示 $h[n]$ 。

5.28 证明卷积和运算满足交换律和分配律

5.29 已知序列

$$x_1[n] = A \text{ (常数)}$$

$$x_2[n] = u[n]$$

$$x_3[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ -1, & n = 1, \\ 0, & \text{others,} \end{cases}$$

证明： $x_3[n] * x_2[n] * x_1[n] \neq x_2[n] * x_3[n] * x_1[n]$

5.30 设：

(a) 有限序列 $x[n]$ 非 0 范围为 $N_1 \leq n \leq N_2$ ，其非 0 点数为 $L_1 = N_2 - N_1 + 1$ 。

(b) 有限序列 $h[n]$ 非 0 范围为 $N_3 \leq n \leq N_4$ ，其非 0 点数为 $L_2 = N_4 - N_3 + 1$ 。

试求序列 $y[n] = x[n] * h[n]$ 的非 0 范围及非 0 点数 L 。

5.31 计算卷积 $y[n] = x[n] * g[n]$

$$(1) \quad x[n] = \alpha^k u[n], \quad g[n] = \beta^k u[n]$$

$$(2) \quad x[n] = g[n] = \begin{cases} k+1, & 0 \leq k \leq 3 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$

5.32 判断下述卷积属于何种类型，并指出参与卷积的序列。

$$(1) \quad y[n] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \cos(2.5i) \cdot e^{n-i} \cdot r_6(n-i)$$

$$(2) \quad y[n] = \sum_{i=0}^9 \sin\left(\frac{\pi}{5}i + \frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{5}\pi(n-i) - \frac{\pi}{9}\right)$$

$$(3) \quad y[n] = \sum_{i=0}^{200} \lg(i+2) \cdot (n-i)^3$$